

Мітрофанов В.П.

к.т.н., доцент, керівник,

Центр передових методів розрахунку бетонних конструкцій, м. Полтава

Митрофанов П.Б.

к.т.н., доцент кафедри будівельних конструкцій Навчально-наукового інституту архітектури, будівництва та землеустрою,

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», м. Полтава

ORCID ID: 0000-0003-4274-1336

**РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ БЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ТРІЩИНАМИ
НА ОСНОВІ СПЕЦІАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕННЯ ЗА КРАЄМ ТРІЩИНИ**

Анотація. Відзначаються недоліки відомих моделей Механіки Крихкого руйнування (МКР), для подолання яких обґрунтовується спеціальний розподіл напруження у зоні послаблених міжчасткових в'язів тріщини (Fracture Process Zone (FPZ)). Ці напруження, названі «Фізично Правдоподібні Напруження (ФПН)», були покладені в основу пропонуємої моделі МКР, яка використовує три параметри матеріалу: силовий σ_m , геометричний «а» та безрозмірний n , що враховує пластичні властивості матеріалу. Наближені величини указаних параметрів матеріалу наводяться.

Для розв'язання задач міцності використовується метод перерізів, але замість відомої версії цього методу застосовується «модифікований метод перерізів», у якому замість асимптотичного розподілу напруження у FPZ використовується ФПН. Незважаючи на застосування трьох параметрів матеріалу, модель МКР на основі ФПН і модифікований метод перерізів приводять до прийняттого в практиці методу розрахунку міцності плоских бетонних і залізобетонних елементів з тріщинами. Запропоновані модель МКР і метод розрахунку дозволяють передбачити поведінку тріщин з урахуванням їх початкового стійкого підростання до критичних довжини тріщини та навантаження. Стаття викладає суть моделі ФПН, приклади розрахунків і показує задовільну близькість теоретичної міцності до експериментальної. Методи випробувань для визначення параметрів моделі ФПН не розглядаються.

Ключові слова: механіка крихкого руйнування, напруження, метод розрахунку.

Постановка проблеми. В лінійній механіці крихкого руйнування (ЛМКР) приймається модель пружного тіла, яка приводить до фізично неправдоподібного нескінченно великого напруження у кінці тріщини. ЛМКР допускає тільки нерухомий стан тріщини і стан її нестійкого поширення. Але в дійсності тріщина завжди спочатку стійко підростає до своєї критичної довжини l_{cr} разом з досягненням критичного навантаження елемента F_{cr} , після чого починається її нестійке поширення і крихке руйнування. Проте ЛМКР не розглядає докритичний розвиток тріщин.

Модель пружно-пластичного тіла може враховувати докритичне підростання тріщин і перехід на низхідну гілку залежності «навантаження елемента F – довжина тріщини l ». Але ця модель вимагає надто складних розрахун-

ків і вона не є універсальною для усіх матеріалів. Взагалі кожен матеріал відрізняється специфікою напружено-деформованого стану в FPZ, що повинно враховуватися моделями МКР деяким чином. Для цього пропонується замість використання моделей деформуємих тіл у всьому об'ємі матеріала елемента застосовувати в FPZ деякий розподіл напруження σ_r , що обґрунтовується на основі фізичних уявлень про поведінку розглядаємого матеріала. Поза FPZ приймається пружна або інша модель деформуємого тіла в залежності від конкретних умов задачі.

Аналіз останніх досліджень. Крихке руйнування зумовлено процесом розриву матеріала в локалізованій зоні r_p послаблених міжчасткових в'язів у кінці тріщини [1] (Fracture Process Zone (FPZ) [2]). Тому точність моде-

лей Механіки Крихкого Руйнування (МКР) залежить від точності опису напружено-деформованого стану матеріала елемента в зоні r_p , який звичайно визначається прийнятою моделлю матеріала.

Уявлення, покладені в основу моделі ФПН. Розглядаються структурно-неоднорідні матеріали, такі як бетони, гірські породи, ґрунти, чавуни, кераміка та інші, що мають явну схильність до крихкого руйнування по тріщині відриву під дією напружень розтягнення. Тому тут аналізуються тільки тріщини відриву, які частіше зустрічаються та найбільш небезпечні в практиці.

На рис. 1 позначена довжина l частини 1 тріщини з суміжними поверхнями без напружень (дійсна тріщина), яка має ширину розкриття на кінці δ_c . Далі розташовується FPZ 2, протилежні поверхні якої плавно змикаються на кінці відстані r_p від початку FPZ. Структура матеріалу в FPZ порушена безліччю мікротріщин, розмір і кількість яких поступово зменшується у напрямку до кінця FPZ, де існує зона 3 помірного розвитку мікротріщин з округлою межею 5. На рис. 1 у перерізі А-А мікротріщини 6 показані умовно круглим контуром.

FPZ є перехідна зона від дійсної тріщини 1 з повністю розірваним матеріалом до зони 4 з непорушеною структурою. Таким чином, якщо відстань (координата) r від кінця O дійсної тріщини збільшується, ступінь порушення структури матеріалу поступово зменшується, а його здатність чинити опір роз-

тягненню відповідно зростає. Тоді на кінці O дійсної тріщини з повністю розірваним матеріалом його опір $\sigma_p = 0$ при $r = 0$. Зате в зоні $r > 0$ відбувається поступове зростання напруження зчеплення σ_r між протилежними поверхнями FPZ, яке досягає максимуму σ_m при певній координаті $r = a$, де існують умови ефективного стримування деформацій і напруження σ_m може значно перевищувати опір матеріалу при осьовому розтягу. Після максимуму σ_m починається зниження напруження σ_r внаслідок зменшення загального рівня напружено-деформованого стану розтягування матеріалу на достатній відстані від кінця тріщини. У результаті має місце хвилястий розподіл напруження σ_r уздовж FPZ, який приймається у моделі ФПН.

Необхідність указаного на рис. 1 характеру розподілу напруження зчеплення σ_r по кривій ОАВ була усвідомлена давно в моделях [3, 4], подальший розвиток яких істотно відрізняється від моделі ФПН.

Описана структура кінцевої зони тріщини відриву підтверджується експериментами [5], у яких деформований стан бетону біля кінця тріщини відриву визначався методами голографічної інтерферометрії за допомогою спекл-фотографій (Electronic Speckle Pattern Interferometry) та акустичної емісії (Acoustic Emission). На спекл-фотографіях [5] добре видно за краєм тріщини вузьку стрічку та округлу зону з мікротріщинами, які можна ототожнювати з FPZ і зоною 3 відповідно на рис. 1.

Мета роботи. Модель МКР на основі ФПН. Розподіл ФПН уздовж зони r_p приймається як функція координати r (рис. 1)

$$\sigma_r = \sigma_m (r/a)^n e^{-n(r/a-1)}, \quad 0 \leq r \leq r_p, \quad (1)$$

де початок осі r розташовується на краю O дійсної тріщини, вісь r з передбачуваним напрямком поширення тріщини, σ_m є максимальний опір матеріалу у FPZ, "a" – внутрішньо-структурний геометричний параметр матеріалу, n – параметр пластичних властивостей матеріалу. Для явно крихких матеріалів $n \geq 1$, для матеріалів, які мають значні пластичні властивості, $0 \leq n < 1$.

При плоскому напруженому стані бетону приблизно приймається $\sigma_m = (1.3 \dots 2) f_{ct}$, де f_{ct} є міцність бетону при осьовому розтягуванні, $n = 2$, параметр "a" ототожнюється з умовною критичною довжиною тріщини l_{cr} , що визначається за рекомендаціями [6],

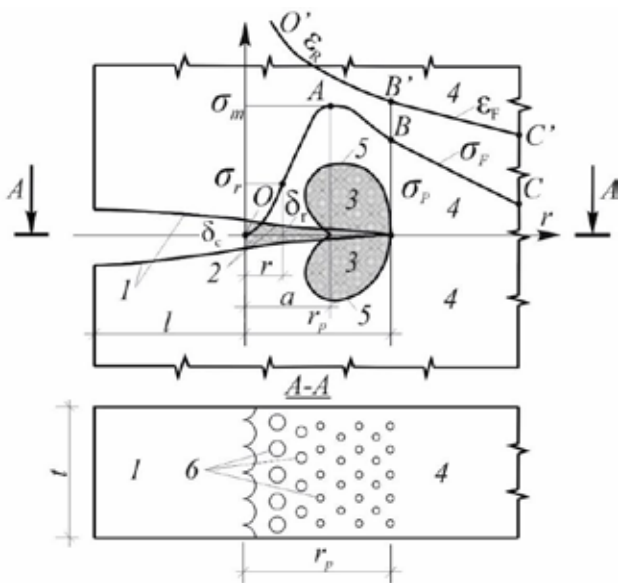


Рис. 1. Структура кінцевої зони тріщини відриву

$$\tilde{l}_{cr} = k \cdot d_{\max}, \quad (2)$$

У яких d_{\max} – найбільша крупність заповнювача бетону, коефіцієнт $K = 1.4 \dots 1.7$ до 2.0 для щебня з граніту та діабазу, $K = 1.2 \dots 1.5$ для гравію з граніту та діабазу, $K = 1$ для м'яких гірських порід (вапняк). Для плоскої деформації параметри моделі ФПН вимагають уточнення.

У подальших розрахунках будуть потрібні нижче наведені залежності та умови.

Рівнодіюча сила ФПН у зоні r_p

$$N_p = t \int_0^{r_p} \sigma_r dr = \sigma_m t a (e/2)^2 u(x_p), \quad (3)$$

де $x_p = r_p/a$, t – товщина плоского елемента,

$$u(x_p) = 1 - (1 + 2x_p + 2x_p^2) e^{-2x_p}. \quad (4)$$

Координата e_p точки прикладання сили N_p (3)

$$e_p = (a/2) V(x_p) / u(x_p), \quad (5)$$

де

$$u(x_p) = 3 - (3 + 6x_p + 6x_p^2 + 4x_p^3) e^{-2x_p}. \quad (6)$$

Дія ФПН (1) обмежена зоною r_p , в якій розвиваються незворотні деформації та граничні напруження матеріалу. Поза зоною r_p при $r > r_p$ розташована зона пружного матеріалу, де напруження $\sigma_F(r)$ визначаються на основі механіки пружних тіл при дії зовнішніх навантажень F . Напруження $\sigma_r(r)$ і $\sigma_F(r)$ стикаються безперервно при $r = r_p$. Тому є важливою «Умова неперервності напружень» σ_r та σ_F (рис. 1)

$$\sigma_r(r_p) = \sigma_F(r_p) = \sigma_p. \quad (7)$$

Для визначення критичного (граничного) навантаження плоских елементів з тріщиною використовується як базовий метод перерізів [7], на основі якого був розроблений «модифікований метод перерізів», де замість асимптотичного розподілу напружень у FPZ, прийнятому в [7], застосовується ФПН.

У методі перерізів в елементі, що розглядається проводиться уявний переріз через кінець O дійсної тріщини у напрямку її передбачуваного поширення. Далі розглядається рівновага зовнішніх і внутрішніх сил прикладених до однієї частини елемента, що відокремлена уявним перерізом. У рівняннях рівноваги використовуються

ФПН (1), їх рівнодіюча сила (3), координата (5).

Метод перерізів [7] включає як додаткову залежність так звану «Умову компенсації напружень», тобто умову, що сила N_{nr} , яка не передається через тріщину, компенсується силою (3)

$$N_{nr} = N_p. \quad (8)$$

Сила N_{nr} визначається із розгляду рівноваги елемента без тріщини як рівнодіюча напружень, прикладених на довжині тріщини і виникаючих під дією зовнішніх навантажень. Обґрунтування «Умови компенсації напружень» зв'язано з відомим способом розкладання напруженого стану елемента з тріщиною [8] на дві складові частини: перша є елемент без тріщини під дією зовнішніх навантажень елемента, що розглядається, друга є елемент з тріщиною, навантажений симетричними напруженнями (1), які прикладені до протилежних поверхонь в тріщині уздовж FPZ.

Система рівнянь, що включає рівняння рівноваги, умови (7) та (8), звичайно виявляється достатньою для визначення залежності «навантаження елемента F – довжина тріщини l », яка вирішує задачу міцності елементів з тріщиною. У протилежному випадку необхідно використовувати додаткові залежності, які враховують певні особливості елемента, що розглядається.

Запропонований метод розрахунку міцності плоских елементів з тріщинами є набагато простіше методів МКР на основі моделі пружно-пластичного тіла. Але і він вимагає чисельних вирішень, які можна реалізувати за допомогою відомих програм Table Processor MS Excel. Прості задачі вирішуються навіть на калькуляторі. При цьому запропонований метод виявляє значні достоїнства: задовільну збіжність з експериментальними даними і здібність передбачати поведінку тріщин у різноманітних елементах при різних навантаженнях та інших умовах (наявність арматури та інших гальмуючих тріщину факторів). Зокрема метод передбачає завжди спостерігаєме в дійсності початкове стійке підростання тріщин, їх раптове поширення, а також плавний поступовий розвиток в залежності від окремих умов. Ці достоїнства можна побачити у прикладах розрахунку, що наводяться нижче.

Задача Грифітса. Нескінчена пластина з прямолінійною тріщиною довжиною $2l$ роз-

тягується напруженнями σ , які прикладені нормально до тріщини на безкрайній відстані від неї (рис. 2,а).

Приводиться переріз А-В і розглядається рівновага напівплосткості (рис. 2,а). ФПН (1) з рівнодіючою силою (3) прикладаються біля обох кінців тріщини в зонах r_p . Поза зонами r_p , коли відстань x від центру тріщини збільшується, пружні напруження σ_{el} уздовж перерізу А-В асимптотично наближаються до величини σ . Згідно теорії пружності напруження [1]

$$\sigma_{el} = \sigma x / (x^2 - l^2)^{1/2}$$

більше тільки на 1% величини σ коли $x = \pm 7l$. Тому при $-7l \geq x \geq 7l$ приймається $\sigma_{el} = \sigma$ і рівновага напівплосткості може розглядатися тільки на ділянці $14l$ (рис. 2, а). При цьому на перехідній ділянці С приймається лінійна зміна напруження від σ_p до σ . Тоді рівняння рівноваги напівплосткості записується так

$$\sigma(l + r_p + c) - N_p - 0.5(\sigma_p + \sigma)c = 0. \quad (9)$$

Крім того застосовуються: умова неперервності напружень (7)

$$\sigma_p = \sigma_m x_p^2 e^{-2(x_p - 1)}, \quad x_p = r_p / a, \quad (10)$$

Умова компенсації напружень (8)

$$\sigma l = N_p, \quad (11)$$

та геометричне співвідношення

$$l + r_p + c = 7l. \quad (12)$$

Рівняння (9)-(12) визначають невідомі σ , σ_p , x_p , c .

У результаті залежність «навантаження σ – довжина тріщини l » виражається через параметр x_p із наступної системи рівнянь

$$\left\{ (l/a)^2 - [\psi(x_p) + 0.163x_p] (l/a) - 0.163x_p \psi(x_p) \right. \quad (13)$$

$$\left. \left\{ \sigma / \sigma_m = (e/2)^2 u(x_p) / (l/a) \right. \right. \quad (14)$$

де

$$\psi(x_p) = u(x_p) / (4x_p^2 e^{-2x_p}), \quad (15)$$

$u(x_p)$ знаходиться по формулі (4).

Призначаючи параметр x_p , обчислюється величина l/a з (13), після чого з (14) визначається σ / σ_m . Результати викладених розрахунків подані в таблиці 1.

Крива « $\sigma / \sigma_m - l/a$ », що визначена по моделі ФПН і показана на рис. 2,б, порівнюється з аналогічними кривими Грифітса і Панасюка [1]. Остання отримана на основі δ_{\square} -моделі, у якій на FPZ приймається рівномірний розподіл напруження σ_0 -границі крихкої міцності матеріалу. Коли $l \rightarrow 0$ крива Грифітса приводить до фізично неможливого результату $\sigma \rightarrow \infty$, а крива Панасюка показує $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Обидві ці криві мають тільки низхідну гілку. Навпаки крива моделі ФПН починається з висхідної гілки, яка досягає точного математичного максимуму при критичних величинах довжини тріщини $l_{cr}/a = 1.008$ і навантаження $\sigma_{cr}/\sigma_m = 0.691$. Далі

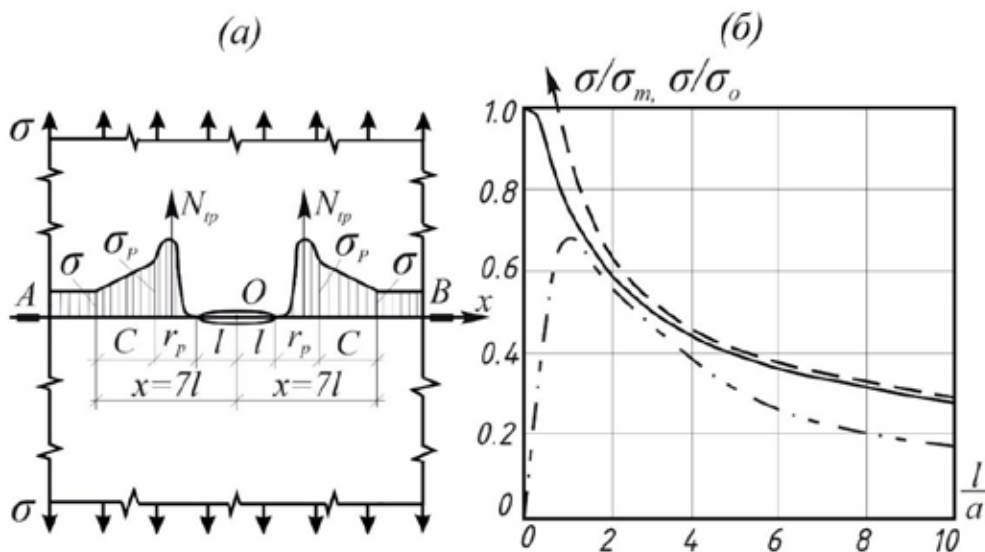


Рис. 2. Розтягнута нескінченна пластина з прямолінійною тріщиною (а) та її теоретичні криві $\sigma / \sigma_m - l/a$ (б): 1 – Грифітса, 2 – Панасюка, 3 – моделі ФПН

Таблиця 1. Точки кривої « $\sigma/\sigma_m - l/a$ » для задачі Грифітса згідно моделі ФПН

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $x_p = r_p/a$ | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,1 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 2,9 |
| l/a | 0 | 0,126 | 0,270 | 0,438 | 0,636 | 1,008 | 1,716 | 3,192 | 5,961 | 10,020 |
| σ/σ_m | 0 | 0,116 | 0,324 | 0,508 | 0,629 | 0,691 | 0,621 | 0,441 | 0,271 | 0,171 |

іде низхідна гілка, що відповідає нестійкому поширенню тріщини і крихкому руйнуванню пластини. Наявність початкового стійкого підростання тріщин у процесі розвитку крихкого руйнування підтверджується експериментами [9-11] та багатьма іншими.

Довга розтягнута полоса з центральною тріщиною. Прямолінійний переріз А-В проводиться (рис. 3,а) і рівновага половини полоси розглядається. Ця задача вирішується аналогічно попередньої, але вона має особливість, пов'язану зі скінченністю ширини полоси $2b$. Тут поза зон $2b$ ділянки зі змінним напруженням можна не вводити і рівномірний розподіл напруження $2b$ є допустимим, коли ширина полоси скінченна.

- – експериментальні точки [10].

Невідомі величини σ, σ_p, r_p визначаються із системи рівнянь, що включає рівняння рівноваги

$$\sigma b - N_p - \sigma_p (b - l - r_p) = 0, \quad (16)$$

умову неперервності напружень (10) та умову компенсації напружень (11). Вилучаючи у (16) напруження σ та σ_p за допомогою (10) і (11), залежність довжини тріщини l від параметра x_p одержується у вигляді квадратного рівняння

$$(l/b)^2 - (1 + B - mx_p)(l/b) + B = 0, \quad (17)$$

де $B = m\psi(x_p)$, $m = a/b$, $\psi(x_p)$ обчислюється із (15) та (4). Далі навантаження σ визначається на основі (10) і (11) по формулі

$$\sigma/\sigma_m = (e/2)^2 m u(x_p)/(l/b). \quad (18)$$

Залежність $\sigma/\sigma_m - l/b$ знаходиться чисельно, призначаючи параметр x_p і обчислюючи l/b з (17) після чого σ/σ_m визначається з (18). При цьому обидва дійсні корені рівняння (17) потрібні, бо вони дозволяють виконувати розрахунки на повному інтервалі $0 \leq l/b \leq 1$. Дійсні корені рівняння (17) існують на обмеженому інтервалі параметра $0 \leq x_p \leq x_p^{\max}$, де x_p^{\max} знаходиться із аналізу рівняння (17). Криві на рис. 3,б були визначені для дослідних зразків [10], для яких прийнято внутрішньо-структурний параметр $a = 1.25 \cdot d_{\max} = 1.25 \cdot 5 = 6.25 \text{ мм}$ і параметр $m = 0.25$, коли знайдено $x_p^{\max} = 1.2$.

Залежність $\sigma/\sigma_m - l/b$ для розтягнутої полоси зі скінченною шириною має висхідну гілку (рис. 3,б) подібну гілці нескінченної пластини (рис. 2,б). Але низхідні гілки цих елементів дуже різні. У полоси скінченної ширини зона також скінченна і спадає до нуля

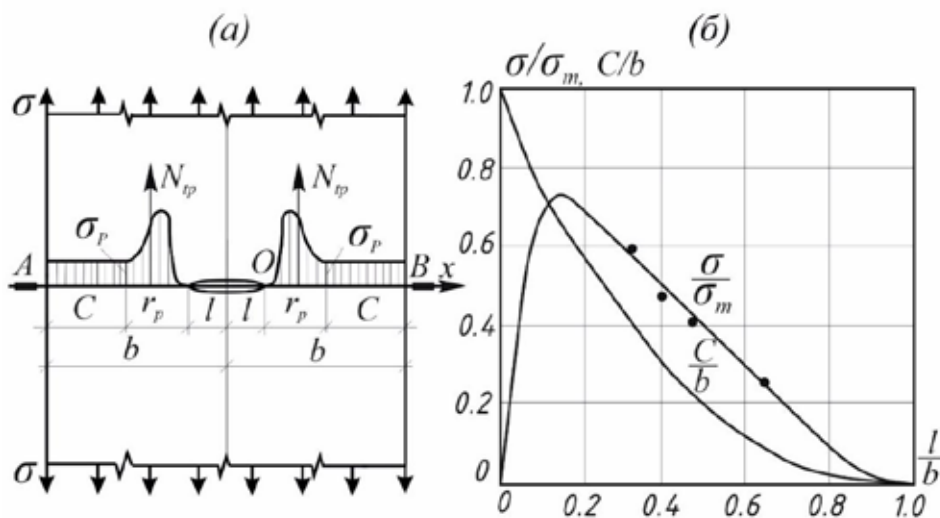


Рис. 3. Довга розтягнута полоса з центральною тріщиною та криві величин σ/σ_m і c/b у залежності від l/b (б).

при $l/b = 1$, коли тріщина повністю розсікає її ширину (рис. 3,б). У нескінченній пластині безмежна низхідна гілка асимптотично наближається до нуля (рис. 2,б). Результати викладених розрахунків для дослідних зразків [10] подано в Таблиці 2, де величини l/b , σ/σ_m , c/b , що відповідають кореням 1 і 2 рівняння (17) позначено нижнім індексом відповідно.

Довга розтягнута полоса з однією тріщиною.

Проводиться переріз А-В (рис. 4,а) і розглядається рівновага половини полоси. ФПН прикладаються в зоні r_p , поза якою ділянка

$$c = 2b - l - r_p \quad (19)$$

вважається пружною з напруженнями σ_p і σ_1 на її відповідних кінцях (рис. 4,а). Невідомі величини $\sigma, \sigma_p, \sigma_1, r_p$ визначаються з системи рівнянь, яка включає два рівняння рівноваги

$$\sum X = 0; \quad 2b\sigma - N_p + 0.5(\sigma_p + \sigma_1)c = 0 \quad (20)$$

$$\sum M_c = 0; \quad N_p(b - l - e_p) - \sigma_c c(l + r_c - b/2)/3 - \sigma_1 c(b + l + r_p)/6 = 0 \quad (21)$$

умову неперервності напружень (10) та умову компенсації напружень (11). Вилучаючи у (20) величини $\sigma, \sigma_p, \sigma_1$ за допомогою (11), (10) та (21), залежність величини $l/2b$ від параметра x_p визначається у вигляді кубічного рівняння

$$(l/2b)^3 - \alpha(l/2b)^2 + \beta(l/2b) - \gamma = 0, \quad (22)$$

з коефіцієнтами

$$\alpha = 2(1 - mx_p + B), \quad \gamma = B(0.5 + mx_p),$$

$$\beta = (1 - mx_p)^2 + (1 + mx_p - 3e_p/2b)B,$$

Таблиця 2. Точки кривих $\sigma/\sigma_m - l/b$ та $c/b - l/b$ для розтягнутої полоси з центральною тріщиною

| $x_p = r_p/a$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.10 | 1.15 | 1.17 | 1.19 | 1.20 |
|---------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| l_1/b | 0 | 0.019 | 0.046 | 0.083 | 0.136 | 0.220 | 0.286 | 0.336 | 0.364 | 0.406 | 0.441 |
| σ_1/σ_m | 0 | 0.188 | 0.476 | 0.670 | 0.734 | 0.680 | 0.609 | 0.556 | 0.526 | 0.483 | 0.449 |
| c_1/b | 1 | 0.930 | 0.854 | 0.767 | 0.664 | 0.530 | 0.439 | 0.377 | 0.344 | 0.296 | 0.260 |
| l_2/b | 1 | 0.949 | 0.895 | 0.836 | 0.768 | 0.680 | 0.645 | 0.567 | 0.540 | 0.499 | 0.465 |
| σ_2/σ_m | 0 | 0.004 | 0.024 | 0.066 | 0.130 | 0.220 | 0.283 | 0.329 | 0.354 | 0.393 | 0.426 |
| c_2/b | 0 | 0.001 | 0.005 | 0.014 | 0.032 | 0.070 | 0.110 | 0.145 | 0.167 | 0.204 | 0.236 |

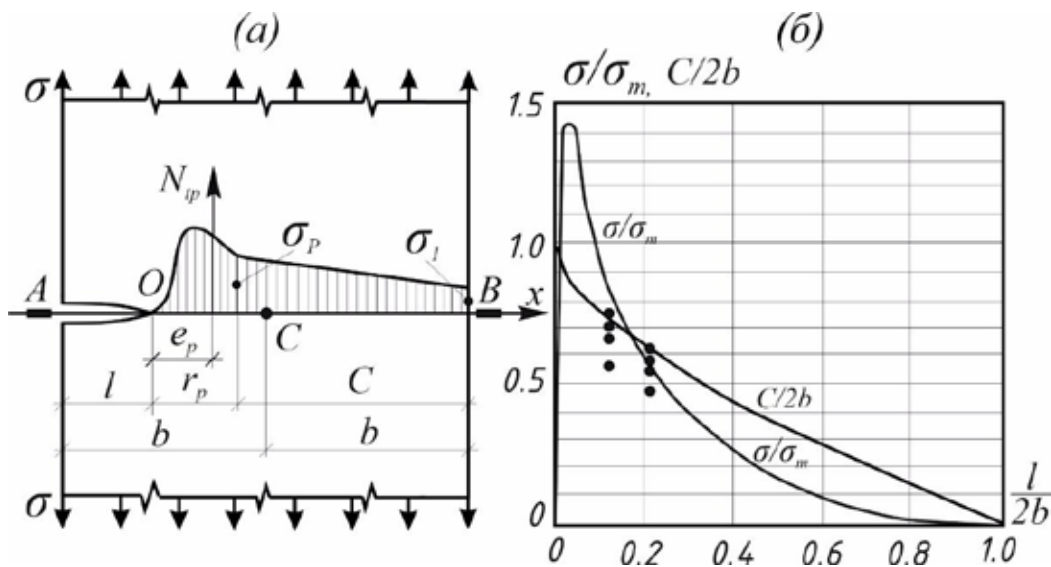


Рис. 4. Довга розтягнута полоса з однією тріщиною (а) та її криві величин σ/σ_m і $c/2b$ у залежності від $l/2b$ (б)

• – експериментальні точки [9].

у яких $B = m\psi(x_p)$, $m = a/2b$, ψ_{x_p} дивись (15), e_p відповідає (5). Залежність для навантаження σ виходить із (11) і (10)

$$\sigma/\sigma_m = (e/2)^2 m u(x_p)/(l/2b). \quad (23)$$

У результаті, (22) та (23) утворюють залежність між σ/σ_m і $l/2b$ за допомогою параметра x_p . При цьому параметр x_p призначається і $l/2b$ визначається з (22), а σ/σ_m обчислюється із (23). Чисельне рішення було знайдено для дослідних зразків [9] з параметром $m = 0.125$. Два кореня рівняння (22) розглядалися на інтервалі $0 \leq l/2b \leq 1$ і на обмеженій множині параметра $0 \leq x_p \leq 1.4$, що витікає із аналізу (22) при $m = 0.125$. Розрахунки визначають довжину пружної зони полоси

$$c/2b = 1 - l/2b - mx_p$$

та напруження на кінцях її

$$\sigma_p/\sigma_m = (e)^2 x_p^2 e^{-2x_p},$$

$$\sigma_1/\sigma_m = 2(\sigma_p/\sigma_m)\omega/(0.5 + l/2b + mx_p),$$

де

$$\omega = 3B(0.5l/2b - e_p/2b)/(1 - l/2b - mx_p) - (l/2b + mx_p - 0.25).$$

Результати обчислювань для дослідних зразків в [9] подано у таблиці 3, де величини, знайдені по кореням 1 і 2 рівняння (22), позначені верхнім індексом відповідно номеру кореня.

Криві на рис. 4,б подібні кривим на рис. 3,б. Напруження σ_p на межі непружної r_p і пружної C зон є розтягуючим при будь-

якій довжині тріщини (рис. 5). На відміну від напруження σ_p напруження σ_1 на правому кінці пружної зони C виявляється розтягуючим тільки при досить малій довжині тріщини $l/2b \leq 0.2$. Коли величина $l/2b$ зростає, напруження σ_1 стає стискаючим, але воно зберігається малим порівняно з міцністю бетону при осьовому стиску, що підтверджує можливість розгляду зони \square як пружної.

Чистий вигин полоси з однією тріщиною. Через тріщину проводиться переріз А-В (рис. 6,а). У зоні r_p прикладається ФПН, а поза r_p матеріал припускається пружним.

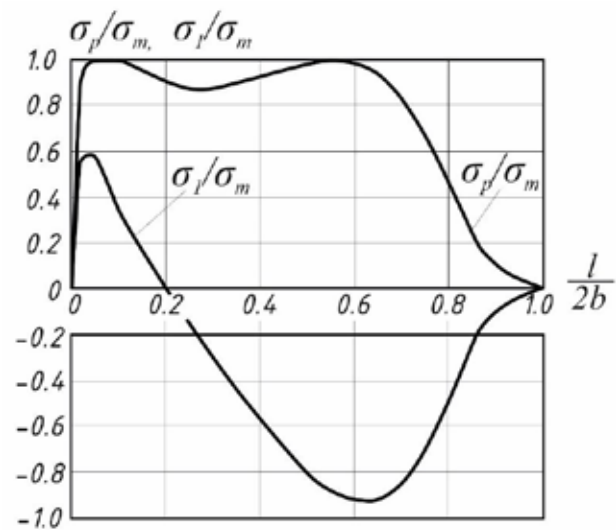


Рис. 5. Вплив довжини тріщини на напруження на кінцях пружної зони розтягнутої полоси з однією тріщиною

Таблиця 3. Точки кривих σ/σ_m , $c/2b$, σ_p/σ_m , σ_1/σ_m у залежності від $l/2b$ для розтягнутої полоси з однією тріщиною

| | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x_p = r_p/a$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 |
| $l^1/2b$ | 0 | 0.005 | 0.013 | 0.024 | 0.035 | 0.066 | 0.084 | 0.122 | 0.167 | 0.271 |
| σ^1/σ_m | 0 | 0.358 | 0.861 | 1.174 | 1.426 | 1.137 | 1.038 | 0.817 | 0.667 | 0.453 |
| $c^1/2b$ | 1 | 0.970 | 0.937 | 0.901 | 0.865 | 0.809 | 0.778 | 0.728 | 0.680 | 0.554 |
| σ_p^1/σ_m | 0 | 0.198 | 0.531 | 0.801 | 0.955 | 1 | 0.991 | 0.965 | 0.928 | 0.881 |
| σ_1^1/σ_m | 0 | 0.174 | 0.410 | 0.536 | 0.563 | 0.478 | 0.328 | 0.245 | 0.099 | -0.195 |
| $l^2/2b$ | 1 | 0.863 | 0.785 | 0.712 | 0.637 | 0.556 | 0.511 | 0.461 | 0.372 | 0.289 |
| σ^2/σ_m | 0 | 0.002 | 0.014 | 0.039 | 0.078 | 0.134 | 0.170 | 0.216 | 0.299 | 0.424 |
| $c^2/2b$ | 0 | 0.112 | 0.165 | 0.213 | 0.263 | 0.319 | 0.351 | 0.389 | 0.455 | 0.536 |
| σ_p^2/σ_m | 0 | 0.198 | 0.531 | 0.801 | 0.955 | 1 | 0.991 | 0.965 | 0.927 | 0.881 |
| σ_1^2/σ_m | 0 | -0.209 | -0.561 | -0.829 | -0.941 | -0.896 | -0.819 | -0.706 | -0.476 | -0.246 |

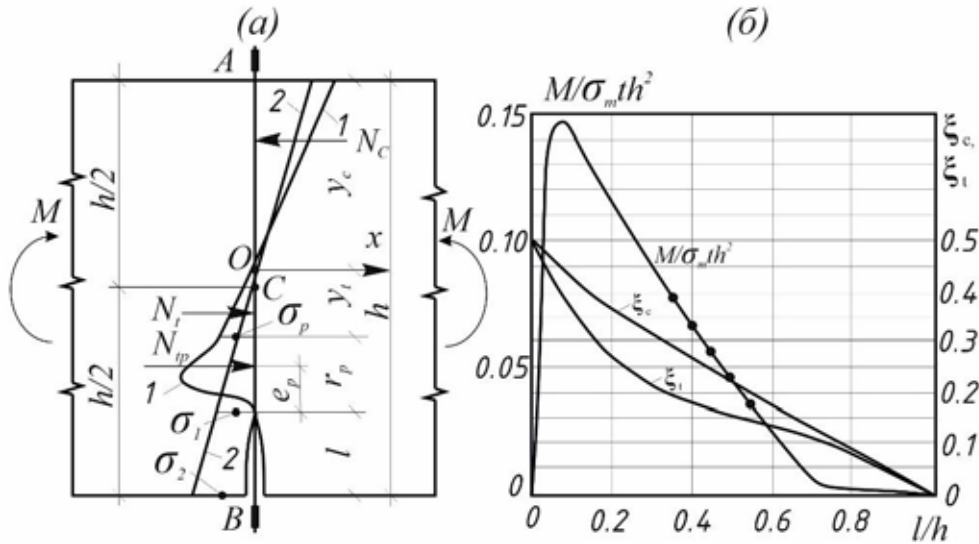


Рис. 6 (а). Напруження в перерізі полоси при чистому згині:

1,2 – відповідно при наявності та відсутності тріщини.

(б) Криві величин $M/\sigma_m t h^2$, ξ_{\square} та ξ_t у залежності від l/h .

• – експериментальні точки [11].

Розглядається рівновага лівої частини полоси. Невідомі величини $M, r_p, \sigma_p, y_t, y_c$ визначаються із системи рівнянь, що включає два рівняння рівноваги $\sum X = 0, \sum M_0 = 0$, умову неперервності напружень (10), умову компенсації напружень (8) та геометричне співвідношення

$$h = l + r_p + y_t + y_c, \quad (24)$$

Щоб отримати умову (8) розглядається рівновага полоси без тріщин. Використовуючи відому формулу нормального напруження в перерізі балки для визначення напружень σ_1 і σ_2 на кінцях ділянки перерізу, яку займає тріщина (рис. 6,а), можна записати так

$$0.5(\sigma_1 + \sigma_2)l \cdot t = N_p, \quad (25)$$

де $\sigma_1 = M(h/2 - l)/J$, $\sigma_2 = Mh/2J$

$J = th^3/12$, t, h – ширина і висота перерізу полоси.

Тоді умова (25) отримує вид

$$6(M/\sigma_m t h^2)(1 - l/h)(l/h) - (e/2)^2 m u(x_p) = 0, \quad (26)$$

де $m = a/h$, $u(x_p)$ знаходиться із (4).

Рівняння рівноваги лівої частини полоси (рис. 6,а) записується так

$$-0.5\sigma_p(y_c^2 - y_t^2)/y_t + N_p = 0, \quad (27)$$

$$M - \sigma_p t (y_c^3 - y_t^3)/3y_t - N_p (y_t + r_p - e_p)t = 0, \quad (21)$$

де N_p, σ_p, e_p визначаються із (3), (10), (5) відповідно.

Висоти стиснутої y_c і розтягнутої y_t пружних зон (рис. 6,а) виражаються через величини x_p і l по формулам

$$\xi_c = y_c/h = A(1 + 0.5A)/(A + B),$$

$$\xi_t = y_t/h = 0.5A/(A + B), \quad (29)$$

де $A = 1 - mx_p - l/h$, $B = m\psi(x_p)$, $\psi(x_p)$ відповідає (15).

Вилучаючи M у (28) за допомогою (26) і враховуючи (29), зв'язок довжини тріщини l з параметром x_p виявляється у вигляді рівняння п'ятої степені

$$(l/h)^5 - a_4(l/h)^4 + a_3(l/h)^3 - a_2(l/h)^2 + a_1(l/h) - a_0 = 0 \quad (30)$$

з коефіцієнтами

$$\alpha_4 = 1 + 3\alpha + 5B, \quad \alpha_0 = B(\alpha + B)$$

$$\alpha_3 = 3\alpha(1 + \alpha) + 5B(1 + 2\alpha) + 4B^2 + 6B(mx_p - e_p/h)$$

$$\alpha_2 = \alpha^2(3 + \alpha) + 5B\alpha(2 + \alpha) + 4B^2(1 + \alpha) + 6B(1 + \alpha + \beta)(mx_p - e_p/h)$$

$$\alpha_1 = \alpha^3 + 5B\alpha^2 + 4B^2\alpha + 6B(\alpha + \beta)(mx_p - e_p/h)$$

у яких $\alpha = 1 - mx_p, B, m, e_p$ визначені вище.

Рівняння (26) і (30) зв'язують згинальний момент M з довжиною тріщини l за допомогою параметра x_p . Залежність $M-l$ знаходиться чисельно, призначаючи x_p і обчис-

люючи l з (30), після чого M визначається з (26). Два менших кореня рівняння (30) враховувались на інтервалі $0 \leq l/h \leq 1$. Обчислення були виконані для дослідних балок [11] при $m = 1/9$ коли підходжі корені рівняння (30) існують на обмеженому інтервалі $0 \leq x_p \leq 1.45$. Результати обчислювань подані в таблиці 4, де величини, що знайдені по кореням 1 і 2 рівняння (30), позначені нижнім індексом, що відповідає номеру кореня.

Крива « $M/\sigma_m t h^2 - l/h$ » зігнутого елемента з однічною тріщиною (рис. 6,б) подібна аналогічним кривим «навантаження – довжина тріщини» інших елементів, що розглянуті вище: вона має початкову висхідну гілку, яка досягає при критичній довжині тріщини і навантаженні, після чого іде падаюча до нуля низхідна гілка, пов'язана з крихким руйнуванням елемента. Висоти стиснутої та розтягнутої зон у перерізі зменшуються разом з ростом тріщини від $y_c = y_t = 0.5h$ до нуля, коли тріщина повністю розсікає переріз елемента.

Результати досліджень. Зіставлені теоретична міцність з експериментальною. Знайдена теоретична міцність розглядаємих елементів з тріщиною була порівняна з експериментальною.

Розтягнуті елементи з центральною тріщиною [10] мали переріз $50 \times 50 \text{ мм}$, довжину центрального розрізу $2l_{cut} = 5, 10, 15, 20, 30 \text{ мм}$ і максимальну крупність заповнювача бетону $d_{max} = 5 \text{ мм}$. Зразки з $2l_{cut} = 5 \text{ мм}$ були нечутливі до розрізу і тому урахувались дані тільки зразків з $2l_{cut} = 10, 15, 20, 30 \text{ мм}$.

Штучні розрізи у бетонних елементах не є тотожними натуральним тріщинам бо не мають натуральної FPZ, яка розвивається при навантаженні після певного приросту Δl роз-

різу. На основі моделі ФПН визначена формула для оцінки цього приросту

$$\Delta l = l_{cr} (1 - l_{cut}/b), \quad (31)$$

де l_{cr} – критична довжина тріщини для розглядаємого елемента, що знаходиться згідно моделі ФПН, l_{cut} – довжина розрізу, яка відповідає довжині тріщини елемента з характерним розміром “b”. Для дослідних елементів [10] за допомогою таблиці 2 визначаємо $l_{cr} = 0.136 \cdot 25 = 3.4 \text{ мм}$. У результаті на рис. 3,б точки дослідних величин σ^{test}/σ_m відповідають довжині тріщини $l = l_{cut} + \Delta l$, де Δl обчислена із (31). Експериментальні точки на рис. 3,б є середніми для 4 або 6 дослідних зразків. Знайдено середнє відношення $\sigma^{calc}/\sigma^{test}$ (теорія/дослід), що дорівнює 1.032, коефіцієнт варіації 1.712%.

Розтягнуті бетонні призми з однічною тріщиною у дослідях [9] мали переріз $20 \times 20 \text{ мм}$, довжину розрізів $l_{cut} = 20$ і 40 мм , найбільшу крупність заповнювача бетону 20 мм . Дослідні точки відношення σ^{test}/σ_m на рис. 4,б розміщуються з урахуванням приросту розрізів згідно (31), де за допомогою таблиці 3 знайдено $l_{cr} = 0.035 \cdot 200 = 7 \text{ мм}$. Зразки з розрізом 40 мм виявили середнє відношення $\sigma^{calc}/\sigma^{test} = 0.997$, коефіцієнт варіації 8.48%.

Для зразків з розрізом 20 мм знайдено середнє відношення $\sigma^{calc}/\sigma^{test} = 0.920$, коефіцієнт варіації 7.03%.

У роботі [11] випробовувалися на чотирьохточковий згин 26 бетонних балок з перерізом $152 \times 203 \text{ мм}$ і прольотом $L = 780 \text{ мм}$. Довжина зони чистого вигину $L/2$. Штучні розрізи розміщувались посередині прольоту і мали довжину 30, 35, 40, 45, 50% висоти перерізу балок. Найбільша крупність заповнювача

Таблиця 4. Точки кривих $M/\sigma_m t h^2$, ξ_{\square} та ξ_t залежності від l/h для полоси з однічною тріщиною при чистому згині

| | | | | | | | | | |
|----------------------|-----|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_p = r_p/a$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.45 |
| l_1/h | 0 | 0.008 | 0.020 | 0.035 | 0.055 | 0.082 | 0.122 | 0.196 | 0.275 |
| ξ_{c1} | 0.5 | 0.498 | 0.477 | 0.464 | 0.450 | 0.434 | 0.413 | 0.376 | 0.336 |
| ξ_{t1} | 0.5 | 0.481 | 0.459 | 0.434 | 0.406 | 0.373 | 0.331 | 0.272 | 0.228 |
| $M_1/\sigma_m t h^2$ | 0 | 0.032 | 0.084 | 0.123 | 0.143 | 0.147 | 0.137 | 0.115 | 0.095 |
| l_2/h | 1 | 0.760 | 0.685 | 0.632 | 0.568 | 0.507 | 0.433 | 0.334 | 0.263 |
| ξ_{c2} | 0 | 0.113 | 0.144 | 0.165 | 0.192 | 0.219 | 0.255 | 0.305 | 0.342 |
| ξ_{t2} | 0 | 0.105 | 0.127 | 0.137 | 0.151 | 0.163 | 0.173 | 0.205 | 0.234 |
| $M_2/\sigma_m t h^2$ | 0 | 0.0015 | 0.0038 | 0.018 | 0.030 | 0.044 | 0.060 | 0.082 | 0.098 |

бетону 19мм. Приріст розрізів Δl був урахований згідно (31), де за допомогою таблиці 4 застосовувалась $l_{cr} = 0.082 \cdot 203 = 16.6\text{мм}$. На рис. 6,б дослідні точки розміщуються з урахуванням довжини тріщини $l = l_{cut} + \Delta l$. При цьому кожній дослідній точці відповідають дані 4 або 6 зразків. Знайдено середнє відношення $M^{calc}/M^{test} = 1.008$ і коефіцієнт варіації 10.73%.

Висновки. Модель ФПН зосереджується на підвищенні точності опису напруженого стану у FPZ, де проявляється специфіка окремих матеріалів, врахування якої вимагає використання трьох параметрів, що відображають різнобічні властивості структури матеріалу.

Модель ФПН виявляє значення критичної довжини тріщини l_{cr} як критерія крихкого руйнування, що визначається не тільки параметрами матеріалу, а ще й особливостями конкретного елемента. Запропонований метод розрахунку дозволяє простежувати процес руйнування елемента від початкових стійких стадій до повного припинення його опору зовнішньому навантаженню. Модель ФПН може бути узагальнена на тримірні елементи. Одержані результати свідчать про позитивну перспективу моделі ФПН особливо після старанного вивчення параметрів матеріалу, наближені величини яких для бетону були використані вище.

Література

1. Панасюк В.В. Гранична рівновага крихких тіл із тріщинами. Київ: Наукова думка, 1968. 247 с.
2. Bazant Z.P. Concrete fracture models: testing and practice. *Eng. Fracture Mech.* 2002. 56. P. 165-205.
3. Hillerborg A., Modeer M., Peterson P.F. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture and finite elements. *Cement concrete Res.* 1976. N6. P. 773-788.
4. Bazant Z.P. Crack band model for fracture of geomaterials // 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics (Edmonton, Alberta, 1982). Ed. Eisenstein Z. 1982. 3. P. 1137-1152.
5. Rosati G.P., Meda A., Guerrini G.L. Strength and brittleness of high-performance concrete slabs // 5th Int. Symp. on Utilization of HS/HP concrete (Sandefjord, Norway, 1999). Ed. Holland I. and Sellevold E.J. 1999. 1. P. 588-597.
6. Maekawa, K., Ishida, T., & Hisada, Y. (2000). A two-parameter model for concrete failure under tensile loading incorporating material structure and creep. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2-3), P. 135-150.
7. Tada, H., Paris, P.C. & Irwin, G.R. (2000). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3rd Edition. ASME Press, New York.
8. Bueckner H.F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Trans. ASME*. 1958. 80. № 6. P. 1225-1230.
9. Liu, J., & Li, J. (2015). Critical crack length in concrete-like materials under tensile loading: An analytical solution. *Engineering Fracture Mechanics*, 139, P. 124-132.
10. Пак А.П., Трапезніков Л.П. Експериментальна перевірка гіпотези узагальненого нормального відриву. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 1979. № 3. С. 118-120.
11. Alam M.R., Azad M.A., Kadir M.A. Fracture toughness of plain concrete specimens made with industry-burnt brick aggregate. *J. of Civil Eng. (IEB)*. 2010. 38(1). P. 81-94.

References

1. Panasiuk V.V. Hranynchna rivnovaha krykhkykh til iz trishchynamy. Kyiv: Naukova dumka, 1968. 247 s.
2. Bazant Z.P. Concrete fracture models: testing and practice. *Eng. Fracture Mech.* 2002. 56. P. 165-205.
3. Hillerborg A., Modeer M., Peterson P.F. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture and finite elements. *Cement concrete Res.* 1976. N6. P. 773-788.
4. Bazant Z.P. Crack band model for fracture of geomaterials // 4th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics (Edmonton, Alberta, 1982). Ed. Eisenstein Z. 1982. 3. P. 1137-1152.
5. Rosati G.P., Meda A., Guerrini G.L. Strength and brittleness of high-performance concrete slabs // 5th Int. Symp. on Utilization of HS/HP concrete (Sandefjord, Norway, 1999). Ed. Holland I. and Sellevold E.J. 1999. 1. P.588-597.
6. Maekawa, K., Ishida, T., & Hisada, Y. (2000). A two-parameter model for concrete failure under tensile loading incorporating material structure and creep. *Engineering Fracture Mechanics*, 65(2-3), P. 135-150.
7. Tada, H., Paris, P.C. & Irwin, G.R. (2000). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 3rd Edition. ASME Press, New York.
8. Bueckner H.F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation // *Trans. ASME*. – 1958. – 80. № 6. – P. 1225-1230.
9. Liu, J., & Li, J. (2015). Critical crack length in concrete-like materials under tensile loading: An analytical solution. *Engineering Fracture Mechanics*, 139, P. 124-132.
10. Pak A.P., Trapeznikov L.P. Eksperymentalna perevirka hipotezy uzahalnenoho normalnoho vidryvu. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*. 1979. № 3. S. 118-120.
11. Alam M.R., Azad M.A., Kadir M.A. Fracture toughness of plain concrete specimens made with industry-burnt brick aggregate. *J. of Civil Eng. (IEB)*. 2010. 38(1). P. 81-94.

**STRENGTH DESIGN OF CONCRETE ELEMENTS WITH CRACKS ON THE BASIS
SPECIAL STRESS DISTRIBUTION BEFORE CRACK EDGE**

Abstract. *It is noted the demerits of known Fracture Mechanics (FM) models, for overcoming of which the special stress distribution on the crack Fracture Process Zone (FPZ) is grounded. This stress was called “Physically Verisimilar Stress (PVS)” and the one is assumed as a basis of the being offered FM model, which uses three material parameters: first force σ_m , second geometric “a” and third dimensionless n, taking into account plastic properties of material. Approximate values of the pointed-out parameters are given.*

For strength problem solving the method of sections is used, but the known version of the one is substituted for the “modified method of sections”, in which instead of the asymptotic stress distribution on the FPZ the PVS is used. Despite the use of three material parameters, the FM model on the basis the PVS and modified method of sections lead to acceptable in practice method of strength design of plane concrete and reinforced concrete elements with cracks. The offered PVS model and design method allow to predict the cracks behavior with consideration their initial stable grooving up to the critical crack length and critical load. The paper states the PVS model gist, examples of designs and shows sufficient nearness of theoretic strength to experimental one. The methods of tests for determination of the PVS model material parameters are not considered here.

Key words: *brittle fracture mechanics, stress, calculation method.*

Mitrofanov V.P.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chief,
Center for Advanced Design Methods of Concrete Structures, Poltava

Mytrofanov P.B.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Building Structures
of the Educational and Scientific Institute of Architecture, Construction and Land Management,
National University “Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic”, Poltava